

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ЦЕНТЪР ЗА ОЦЕНЯВАНЕ В ПРЕДУЧИЛИЩНОТО И УЧИЛИЩНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

НАЦИОНАЛНО ВЪНШНО ОЦЕНЯВАНЕ
ПО МАТЕМАТИКА – X клас, 16.06.2023 г.

Време за работа – 90 минути

Отговорите на задачите от 1. до 15. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Броят на целите числа x , които изпълняват условията $-\sqrt{2} \leq x \leq \pi$, е:

- А) 2
- Б) 3
- В) 4
- Г) 5

2. Стойността на израза $\sqrt{2} + \sqrt{162} - \sqrt{2^5}$ е:

- А) $5\sqrt{2}$
- Б) $6\sqrt{2}$
- В) $8\sqrt{2}$
- Г) $14\sqrt{2}$

3. Ако единият корен на уравнението $x^2 + bx - 100 = 0$ е равен на 1, то коефициентът b е равен на:

- А) -100
- Б) -99
- В) 99
- Г) 100

4. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $2x^2 - 3x - 4 = 0$, то стойността на израза $(x_1x_2)^2 - (x_1 + x_2)$ е:

А) $-\frac{11}{2}$

Б) $\frac{3}{2}$

В) $\frac{5}{2}$

Г) $\frac{11}{2}$

5. Решенията на неравенството $\frac{(x-4)(x+1)}{x+4} \leq 0$ са:

А) $x \in (-\infty; -4) \cup [-1; 4]$

Б) $x \in (-4; -1] \cup [4; +\infty)$

В) $x \in [-1; 4]$

Г) $x \in (-\infty; -4] \cup [-1; 4]$

6. Най-голямата стойност на функцията $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ е:

А) -1

Б) 1

В) 2

Г) 5

7. Стойността на израза $\frac{\sin 30^\circ + \cos 60^\circ}{\cos^2 90^\circ - 1}$ е:

А) $-\sqrt{3}$

Б) -1

В) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

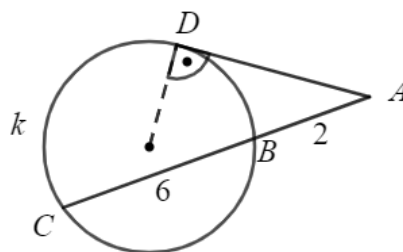
Г) $-\frac{1}{4}$

8. Числата $x-2$, x и $x+6$, взети в този ред, са последователни членове на геометрична прогресия при стойност на x равна на:

- А) -3
- Б) 2
- В) 3
- Г) 9

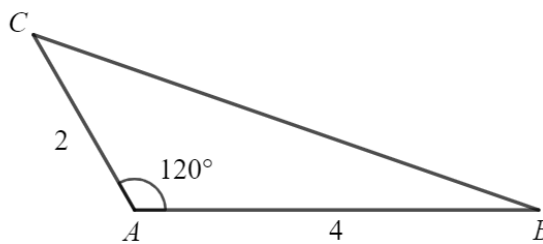
9. На чертежа през точка A , външна за окръжност k , са построени допирателната AD и секущата AC , която пресича окръжността в точка B . Ако $AB = 2$ cm и $BC = 6$ cm, дължината на AD е:

- А) 3 cm
- Б) $2\sqrt{3}$ cm
- В) 4 cm
- Г) $3\sqrt{2}$ cm



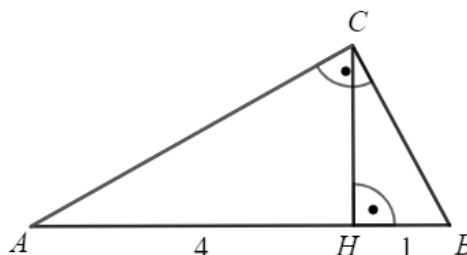
10. Даден е $\triangle ABC$ със страни $AB = 4$ cm, $AC = 2$ cm и $\sphericalangle BAC = 120^\circ$. Дължината на страната BC е:

- А) $2\sqrt{7}$ cm
- Б) $2\sqrt{5}$ cm
- В) $3\sqrt{2}$ cm
- Г) $2\sqrt{3}$ cm



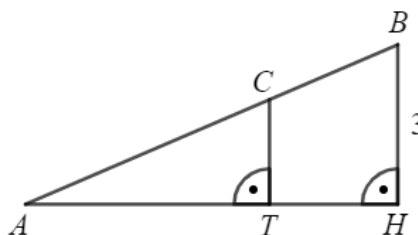
11. В правоъгълния $\triangle ABC$ петата на височината към хипотенузата я дели на отсечки с дължини 4 cm и 1 cm. Лицето на триъгълника е:

- А) 4 cm²
- Б) 5 cm²
- В) 6 cm²
- Г) 8 cm²



12. Детска пързалка с височина 3 m е укрепена с вертикален стълб CT , както е показано на чертежа. Ако $AT : TH = 3 : 2$, височината на стълба CT е:

- А) 1,2 m
- Б) 1,5 m
- В) 1,6 m
- Г) 1,8 m



13. В балкански шампионат по гимнастика участват 20 спортисти от три държави: 8 от Румъния, 7 от Гърция и останалите са от България. Редът на представянето им се определя с жребий. Вероятността български гимнастик да стартира първи, е:

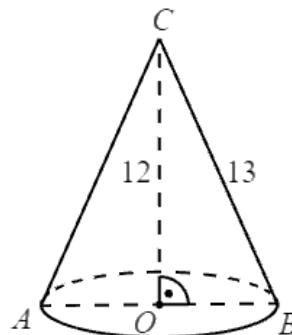
- А) $\frac{3}{4}$
- Б) $\frac{2}{5}$
- В) $\frac{1}{4}$
- Г) $\frac{1}{5}$

14. В една фирма работят 7 работници със заплати по 1250 лв., 2 специалисти – със заплати по 1820 лв. и един ръководител – със заплата 2360 лв. Средната заплата във фирмата е:

- А) 1250 лв.
- Б) 1475 лв.
- В) 1810 лв.
- Г) 1820 лв.

15. Прав кръгов конус има височина 12 cm и образуваща 13 cm. Обемът на конуса е:

- А) $300\pi \text{ cm}^3$
- Б) $120\pi \text{ cm}^3$
- В) $100\pi \text{ cm}^3$
- Г) $40\pi \text{ cm}^3$



Пълните решения с необходимите обосновки на задачите 16. и 17. запишете в листа за отговори на указанията за това място!

16. А) Решете уравнението $\sqrt{3x+4}-\sqrt{x}=2$

Б) Решете системата
$$\begin{cases} 2x-y=3 \\ 2x^2-y^2=7 \end{cases}$$

В) Едната страна на правоъгълен парцел е с 20 m по-дълга от другата. Колко метра мрежа са необходими за неговото заграждане, ако площта му е 525 m^2 ?

17. В $\triangle ABC$ със страни $AC = BC = 4\sqrt{5}$ cm, $CD (D \in AB)$ е височина и $AD=4$ cm.

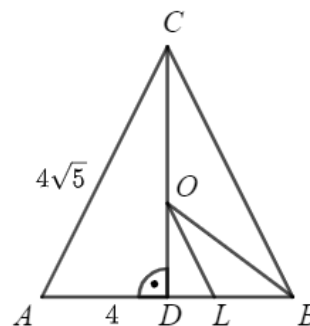
Намерете:

А) лицето на $\triangle ABC$;

Б) радиуса на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност;

В) радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност;

Г) дължината на ъглополовящата OL в $\triangle BOD$, където точка O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.



МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ЦЕНТЪР ЗА ОЦЕНЯВАНЕ В ПРЕДУЧИЛИЩНОТО И УЧИЛИЩНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

НАЦИОНАЛНО ВЪНШНО ОЦЕНЯВАНЕ
ПО МАТЕМАТИКА – X клас, 16 юни 2023 г.

Ключ с верните отговори

№ на задача	Отговор	Брой точки
1	Г	4
2	Б	4
3	В	4
4	В	4
5	А	4
6	Б	4
7	Б	4
8	В	4
9	В	4
10	А	4
11	Б	4
12	Г	4
13	В	4
14	Б	4
15	В	4
16 А)	$x_1 = 0, x_2 = 4$	6 точки
16 Б)	$(2; 1)$ и $(4; 5)$	6 точки
16 В)	За ограждането на парцела са необходими 100 m мрежа.	8 точки
17 А)	$S_{\Delta ABC} = 32 \text{ cm}^2$	5 точки
17 Б)	$r = 2(\sqrt{5} - 1) \text{ cm}$	5 точки
17 В)	$R = 5 \text{ cm}$	4 точки
17 Г)	$OL = \frac{3}{2}\sqrt{5} \text{ cm}$	6 точки

Предложените решения на задачи с номера 16. и 17. са примерни. Всяко друго вярно и пълно решение се оценява с максимален брой точки. При оценяване на непълно решение, различно от предложените, се присъждат точки според получените междинни резултати.

Задача 16. Примерно решение:

$$A) \sqrt{3x+4} - \sqrt{x} = 2 \quad DM : x \in [0; +\infty)$$

$$\sqrt{3x+4} = 2 + \sqrt{x}$$

$$(\sqrt{3x+4})^2 = (2 + \sqrt{x})^2$$

$$3x+4 = 4 + 4\sqrt{x} + x$$

$$2x = 4\sqrt{x} \quad | : 2$$

$$(x)^2 = (2\sqrt{x})^2$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 4$$

С проверка установяваме, че и двата корена са решение на уравнението.

Б) Изразяваме y от първото уравнение и заместваме във второто.

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \rightarrow y = 2x - 3 \\ 2x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$$

$$2x^2 - (2x - 3)^2 = 7$$

$$2x^2 - (4x^2 - 12x + 9) = 7$$

$$2x^2 - 4x^2 + 12x - 9 - 7 = 0$$

$$-2x^2 + 12x - 16 = 0 \quad | : (-2)$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \text{с корени } x_1 = 2, \quad x_2 = 4.$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2x - 3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \cdot 2 - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \cdot 4 - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 5 \end{cases}$$

Решенията на системата са: $(2; 1)$ и $(4; 5)$.

В) Означаваме ширината b на парцела с x , $x > 0$.

Тогава дължината му ще бъде $a = x + 20$.

От формулата $S = ab$ получаваме уравнението $x(x + 20) = 525$.

Решаваме уравнението $x^2 + 20x - 525 = 0 \Rightarrow x_1 = 15, x_2 = -35$.

Тъй като $x > 0$, следователно $b = 15$ m.

Тогава дължината на парцела е $a = 35$ m.

Намираме обиколката на парцела, която е $P = 2(a + b) = 2(35 + 15) = 100$ m.

Извод: За заграждането на парцела са необходими 100 m мрежа.

Задача 17. Примерно решение:

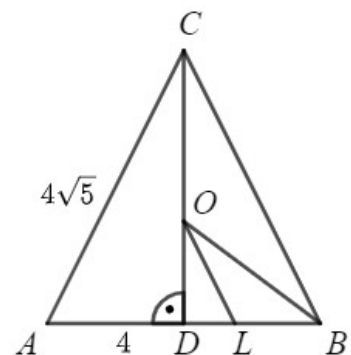
А) $\triangle ABC$ е равнобедрен $\Rightarrow AB = 8$ cm.

Прилагаме Питагорова теорема за $\triangle ADC$:

$$DC^2 = AC^2 - AD^2 \Rightarrow DC^2 = (4\sqrt{5})^2 - 4^2 \Rightarrow DC^2 = 64$$

$$\Rightarrow DC = 8 \text{ cm}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32 \text{ cm}^2$$



Б) Прилагаме формулата $S = p \cdot r$ за $\triangle ABC$:

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{8 + 2 \cdot 4\sqrt{5}}{2} = 4 + 4\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$r = \frac{S}{p} \Rightarrow r = \frac{32}{4 + 4\sqrt{5}} \Rightarrow r = 2(\sqrt{5} - 1) \text{ cm}.$$

В) **Първи начин:** Прилагаме формулата $S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$ за $\triangle ABC$:

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} \Rightarrow R = \frac{4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 8}{4 \cdot 32} \Rightarrow R = 5 \text{ cm}.$$

Втори начин: Изразяваме $\sin \sphericalangle DAC = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \sin \sphericalangle DAC = \frac{8}{4\sqrt{5}} \Rightarrow \sin \sphericalangle DAC = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Прилагаме синусова теорема за $\triangle ABC$: $R = \frac{BC}{2 \sin \sphericalangle DAC} = \frac{4\sqrt{5}}{2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}} = 5 \text{ cm}.$

Г) Прилагаме Питагорова теорема за $\triangle BDO$:

$$OD^2 = OB^2 - DB^2 \Rightarrow OD^2 = 5^2 - 4^2 \Rightarrow OD^2 = 9 \Rightarrow OD = 3 \text{ cm}$$

Прилагаме свойството на ъглополовящата за $\triangle ODB$: $\frac{OD}{OB} = \frac{DL}{LB} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{DL}{BL}.$

Ако $DL = 3x$, то $BL = 5x$.

$$DL + BL = 4$$

$$3x + 5x = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow DL = \frac{3}{2} \text{ cm}, BL = \frac{5}{2} \text{ cm}.$$

Първи начин: Прилагаме формулата за ъглополовящата в $\triangle ODB$

$$OL^2 = OD \cdot OB - DL \cdot BL \Rightarrow OL^2 = 3 \cdot 5 - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 2} = \frac{45}{4} \Rightarrow OL = \frac{3}{2} \sqrt{5} \text{ cm}.$$

Втори начин: Прилагаме Питагорова теорема за $\triangle ODL$

$$OL^2 = OD^2 + DL^2$$

$$OL^2 = 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$OL^2 = 9 + \frac{9}{4}$$

$$OL^2 = \frac{45}{4} \Rightarrow OL = \frac{3}{2} \sqrt{5} \text{ cm}.$$